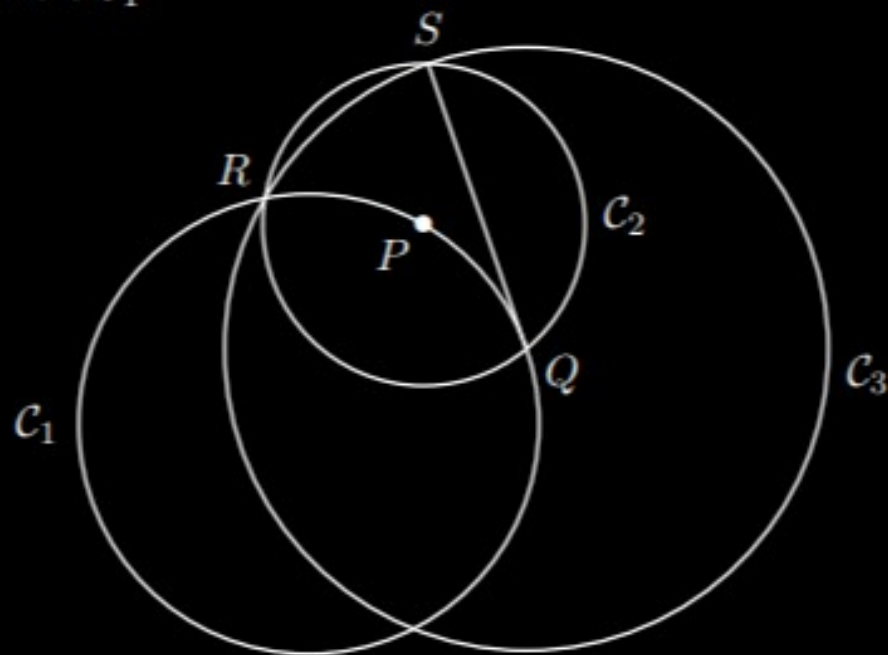
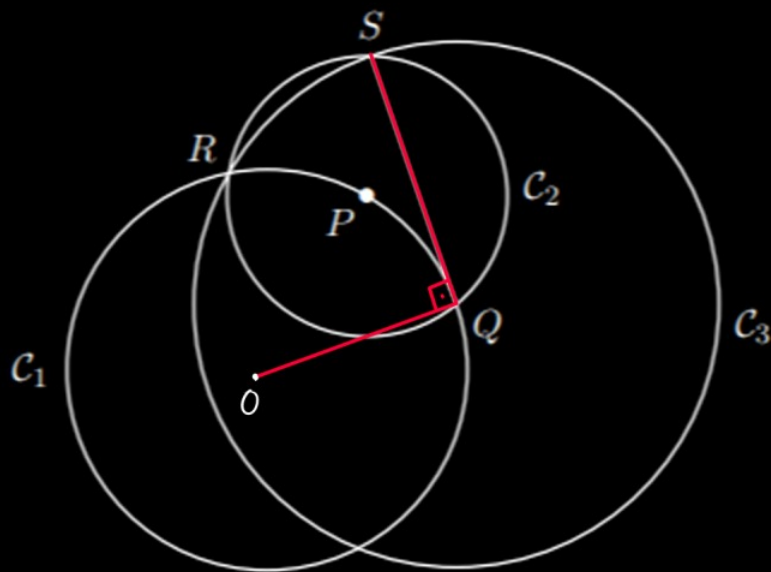
Doubt Yourself

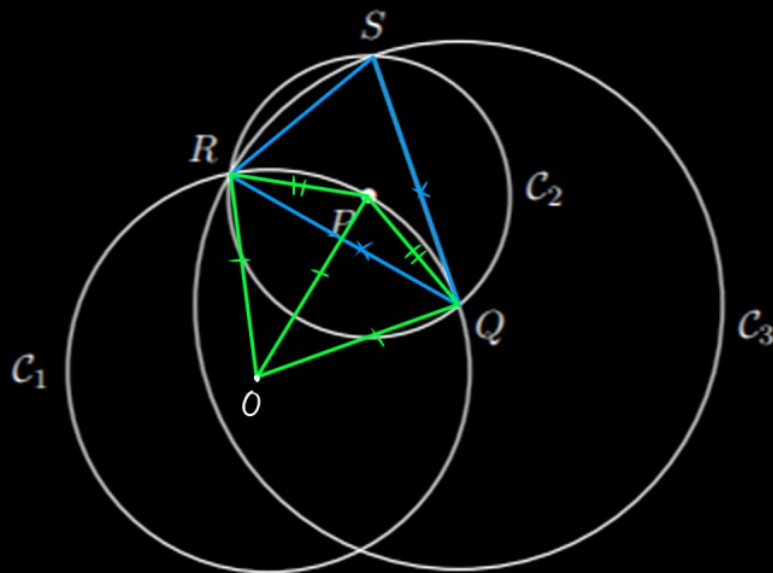
Olimpíadas portuguesas de matemática

Dia 1 - Fase final

André Pinheiro

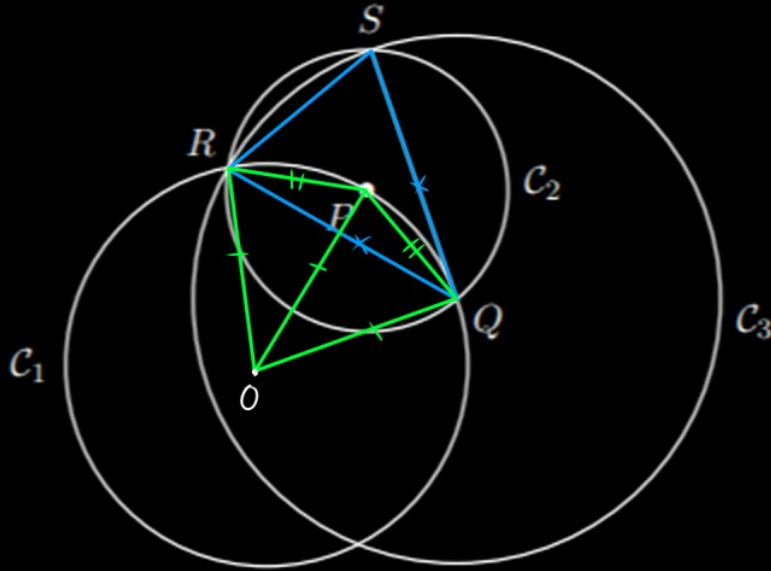
Outubro de 2022

2. Seja P um ponto sobre uma circunferência $\mathcal{C}_1$ e seja $\mathcal{C}_2$ uma circunferência de centro P que interseta $\mathcal{C}_1$ em dois pontos Q e R. A circunferência $\mathcal{C}_3$, de centro Q e que passa por R, interseta $\mathcal{C}_2$ noutro ponto S, como na figura. Mostra que QS é tangente a $\mathcal{C}_1$.

Solução

Seja O centro da circunferência C_1. De acordo com o teorema da reta tangente reta tangente, se $OQ \perp SQ$, então SQ é tangente a C1.

Portanto, temos que provar que $\angle OQS = 90^{\text{o}}$

Solução

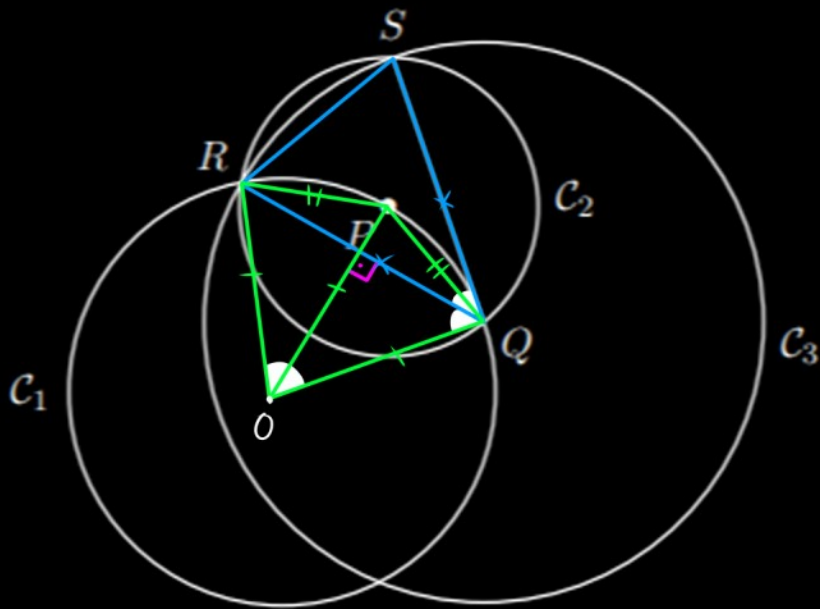
Prova:

Sabemos que $\overline{\text{RO}} = \overline{\text{OP}} = \overline{\text{OQ}}$ e que $\overline{\text{RP}} = \overline{\text{PQ}}$. Portanto os triângulos [ROP] e [OPQ] são congruentes pelo critério LLL.

Solução

Prova:

Sabemos que $\overline{RO} = \overline{OP} = \overline{OQ}$ e que $\overline{RP} = \overline{PQ}$. Portanto os triângulos [ROP] e [OPQ] são congruentes pelo critério LLL.

Sabemos também que $\overline{RQ} = \overline{SQ}$. Logo o triâgulo RSQ é isósceles.

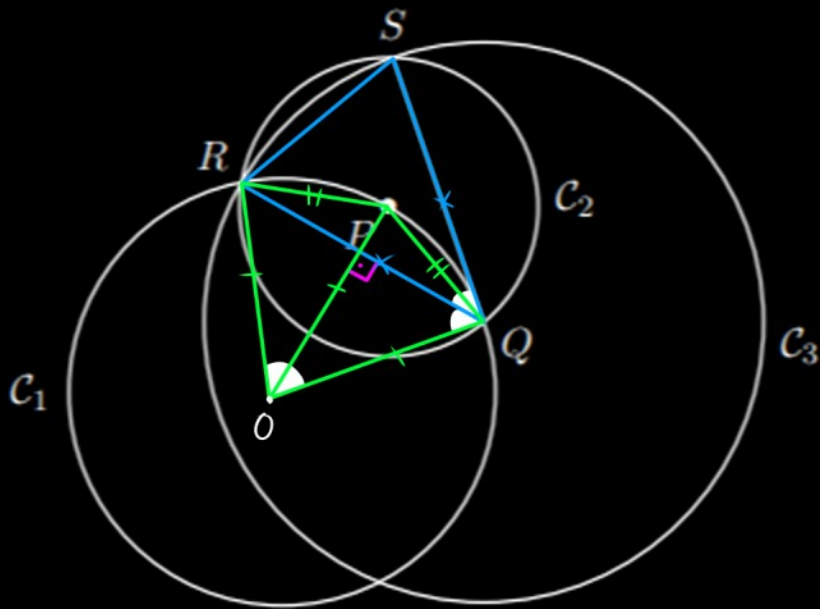
Solução

Prova:

Sabemos que $\overline{RO} = \overline{OP} = \overline{OQ}$ e que $\overline{RP} = \overline{PQ}$. Portanto os triângulos [ROP] e [OPQ] são congruentes pelo critério LLL.

Sabemos também que $\overline{RQ} = \overline{SQ}$. Logo o triâgulo [RSQ] é isósceles.

Seja $\angle PQS = x$, como o triâgulo [RSQ] é isósceles, temos $\angle PQS = \angle RQP = x$.

Pelo teorema do ângulo inscrito, $\angle ROP = 2\angle RQP = 2x$.

Solução

Prova:

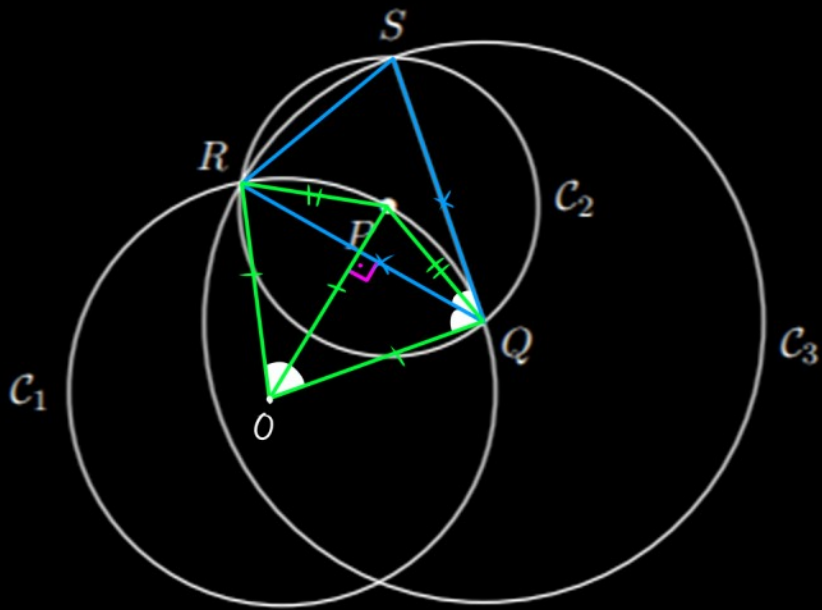
Seja ∠ PQS = x, como o triâgulo [RSQ] é isósceles, temos ∠ PQS = ∠ RQP = x.

Pelo teorema do ângulo inscrito, ∠ ROP = 2∠ RQP = 2x.

Dado que os triângulos [ROP] e [OPQ] são congruêntes, ∠ POQ = ∠ RQP = 2x.

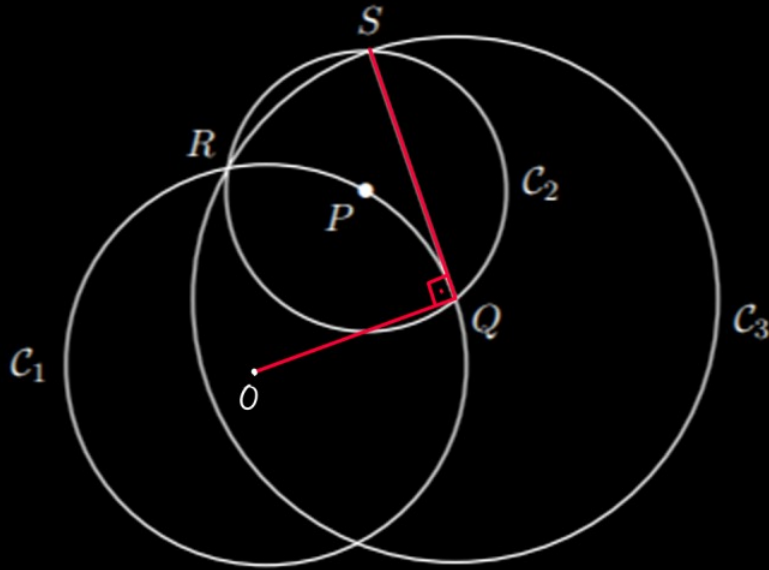
Seja J o ponto de interseção entre OP e RQ.

O triângulo [OJQ] é reto em J e como a soma dos ângulos internos é 180º, temos ∠ OQP = 90º – ∠ POQ = 90º – 2x.

Solução

Prova:

O triângulo [OJQ] é reto em J e como a soma dos ângulos internos é 180º, temos $\angle OQP = 90º - \angle POQ = 90º - 2x$

Por fim, temos $\angle OQS = \angle OQJ + \angle RQP + \angle PQS = 90º - 2x + x + x = 90º$

Solução

Prova:

O triângulo [OJQ] é reto em J e como a soma dos ângulos internos é 180º, temos $\angle OQP = 90º - \angle POQ = 90º - 2x$

Por fim, temos $\angle OQS = \angle OQJ + \angle RQP + \angle PQS = 90º - 2x + x + x = 90º$

Tal como queríamos mostrar ■